Correction du DST n°6

Exercice 1

1. On sait d'après le cours que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Pour tout entier $n \geq 1$, f est donc continue et dérivable sur $[n, n+1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]n, n+1[$ tel que :

   $$f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n) = f'(c)$$

   Donc :

   $$|f(n+1) - f(n)| = |f'(c)| = \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$$

   car $n < c < n+1$ donc $1 + n^2 \leq 1 + c^2$ donc $\dfrac{1}{1+c^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2}$.

2. On a $\frac{1}{1+n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann convergente car $2 > 1$), donc la série de terme général $\frac{1}{1+n^2}$ converge par comparaison de séries positives.

   D'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 1$: $|u_n| \leq \frac{1}{1+n^2}$, donc la série de terme général $|u_n|$ converge par comparaison de séries positives. La série de terme général u_n converge absolument donc converge.

Exercice 2

1. On a $P^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 00 & 0 & 11 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$ donc P est inversible et $P^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. On calculer et on trouve bien $P^{-1}AP = P^2AP = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. (a) Vrai pour $n = 0$ car $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = I = L^0$.

   Si c'est vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, alors

   $$\begin{aligned}
   L^{n+1} &= LL^n \\
   &= LP^{-1}A^nP && \text{par hypothèse de récurrence} \\
   &= P^{-1}APP^{-1}A^nP && \text{d'après la question précédente} \\
   &= P^{-1}A^{n+1}P
   \end{aligned}$$

   donc par récurrence $P^{-1}A^nP = L^n$ est vrai pour tout entier naturel n.

   (b) $J = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. On calcule $J^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ puis $J^3 = 0$.

   (c) I et J commutent (car I commute avec toutes les matrices). Pour tout entier $n \geq 2$ on a donc $L^n = (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k}$. Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $I^{n-k} = I$ et pour tout $k \geq 3$, $J^k = 0$. Ainsi :

   $$\begin{aligned}
   L^n &= \binom{n}{0}J^0 + \binom{n}{1}J^1 + \binom{n}{2}J^2 \\
   &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2
   \end{aligned}$$

   (d) On a donc pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} L^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $n = 1$ la matrice ci-dessus est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^1$ et pour $n = 0$ c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = L^0$. Le résultat reste donc vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

(e) Il suffit de combiner les résultats des questions 3.(a) et 3.(d).

Pour tout entier naturel n, $P^{-1}A^nP = L^n$ donc $A^n = PL^nP^{-1} = PL^nP^2$, et donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. (a) (u_n) est une suite constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 = 1$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

(c) $X_1 = IX_1 = A^0X_1 = A^{1-1}X_1$ donc vrai pour $n = 1$.

Supposons que $X_n = A^{n-1}X_1$ pour un entier $n \geq 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n && \text{d'après 4.(b)} \\ &= AA^{n-1}X_1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^nX_1 \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang $n + 1$.

Par récurrence on en conclut que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = A^{n-1}X_1$.

(d) On a $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc d'après la question 3.(e) et 4.(c) on a donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}$$

donc pour tout entier $n \geq 1$ on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

Exercice 3

1. (a) Calculons :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $u(b_1) = (-4, -2, -2, -2) = -2b_1$.

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

donc $u(b_2) = (-3, -3, -1, -3) = -b_2$

(b) Les réels $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$ vérifient bien $u(b_1) = \lambda_1 b_1$ et $u(b_2) = \lambda_2 b_2$.

2. (a) Calculons :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl}-7x+14y+6z-10t&=&0\\-3x+7y+3z-6t&=&0\\-3x+6y+2z-4t&=&0\\-x+4y-4t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+4y-4t&=&0\\-14y+6z+18t&=&0\\-5y+3z+6t&=&0\\-6y+2z+8t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+4y-4t&=&0\\-7y+3z+9t&=&0\\-5y+3z+6t&=&0\\-3y+z+4t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+4y-4t&=&0\\-7y+3z+9t&=&0\\6z-3t&=&0\\-2z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+4y-4t&=&0\\-7y+3z+9t&=&0\\2z-t&=&0\\0&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&4y-4t\\y&=&\frac{1}{7}(3z+9t)\\t&=&2z\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&4z\\y&=&3z\\t&=&2z\end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z,t)=z(4,3,1,2)$$

donc le vecteur $b_3=(4,3,1,2)$ est dans le noyau de u et vérifie $z=1$.

(b) On en déduit que $u(b_3)=0=0b_3$.

3. (a) Comme $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ il suffit de montrer que la famille (b_1,b_2,b_3,e_4) est libre. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tels que $xb_1+yb_2+zb_3+te_4=0$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl}2x+3y+4z&=&0\\x+3y+3z&=&0\\x+y+z&=&0\\x+3y+2z+t&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x+3y+2z&=&0\\-3y-2z&=&0\\-2y-2z&=&0\\-z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+3y+2z&=&0\\-3y-2z&=&0\\-2z&=&0\\-z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff x=y=z=t=0$$

donc (b_1,b_2,b_3,e_4) est une famille libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) On a $u(b_1)=-2b_1$, $u(b_2)=-b_2$, $u(b_3)=0b_3$, et $u(e_4)=(-10,-6,-4,-4)$.

Exprimons $u(e_4)$ dans la base (b_1,b_2,b_3,e_4) : on vérifie facilement que $-3b_1-b_3+e_4=(-10,-6,-4,-4)$ donc $u(e_4)=-3b_1+0b_2-b_3+e_4$, d'où la matrice A' :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) $A' - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice échelonne de rang 3, comme $3 < 4$ cette matrice n'est pas inversible d'après le cours.
   (b) $A' - I$ n'est pas inversible donc $A' - I$ n'est pas injective donc $\text{Ker}(A' - I) \neq \{0\}$ donc $\text{Ker}(A' - I)$ contient des vecteurs non nuls.
   (c) D'après la question précédente il existe un vecteur colonne $X \in \text{Ker}(A' - I)$ avec X non nul, donc $(A' - I)X = 0$, donc $A'X - X = 0$ donc $A'X = X$.
   (d) Soit b_4 le vecteur de $\mathbb{R}^4$ représenté par X dans la base $\mathcal{B}'$. Alors d'après la question précédente $u(b_4) = b_4$.
5. Comme $u(b_4) = b_4$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}''$ est :

$$A'' = \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   donc A'' est bien diagonale.
6. En posant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}''$ on a d'après la formule de changement de base :

$$A'' = P^{-1}AP$$

Exercice 4

1. (a) À l'issue dans la 1ère expérience, on a soit ajouté une boule blanche dans l'urne, soit ajouté une boule rouge. Le nombre de boules rouges dans l'urne est donc 1 ou 2 donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.

   $(X_1 = 1)$ est réalisé si et seulement si la première boule tirée est blanche, et $(X_1 = 2)$ est réalisé si et seulement si la première boule tirée est rouge d'où :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$$

   donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$.

   Calculons :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 1 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_1 = 2) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   et d'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= 1^2 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X_1 = 2) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

   donc $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$
   (b) $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$, $[X_2 = 2] = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)$ et $[X_2 = 3] = R_1 \cap R_2$.

(c) On a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ car on a ajouté entre 0 et 2 boules rouges lors des deux premiers tirages.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(X_2 = 3) &= \mathbb{P}(R_1) \cap \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 3]\!])$.

On en déduit que $E(X_2) = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $V(X_2) = \dfrac{3^2 - 1}{12} = \dfrac{2}{3}$.

(d) Calculons une à une les 6 probabilités de la loi du couple (X_1, X_2) :

- $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 3) = 0$, le nombre de boule rouge dans l'urne ne pouvant augmenter que de 1 en 1.
- $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 1) = 0$, le nombre de boule rouge dans l'urne ne pouvant pas décroitre au cours des tirages.
- $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 2) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.
- $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 3) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Pour résumer :

X_1 \ X_2	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(e) D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} ij\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \\
&= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 2 \times \frac{1}{6} + 0 + 0 + 2 \times 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times 3 \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{10}{3} - \frac{3}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$$

$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$ donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

2. (a) $[X_n = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$.

   (b) D'après la question 1.a) $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$, donc le résultat est déjà vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

   Supposons que pour un entier $n \geq 1$ quelconque on ait $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \dfrac{1}{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(B_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

   donc le résultat est encore vrai au rang $n+1$. Par récurrence on en conclut qu'on a bien pour tout $n \geq 1$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

   De même, $[X_n = n+1] = \bigcap_{k=1}^{n} R_k$: la seule façon d'avoir $n+1$ boules rouges à l'issue du n-ème tirage est si toutes les boules tirées sont rouges.

   On a déjà vu que $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{3}$, montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \dfrac{1}{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = n+2) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} R_k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) \times \ P_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

   donc par récurrence, pour tout $n \geq 1$ on a : $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Supposons l'événement $[X_n = k-1]$ réalisé, alors au moment du $n+1$-ème tirage il y a $k-1$ boules rouges dans l'urne et $n+2$ boules au total. La probabilité de $[X_{n+1} = k]$, c'est à dire la probabilité de passer à k boules rouges, est la probabilité de tirer une boule rouge :

$$\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n = k-1]}(R_{n+1}) = \frac{k-1}{n+2}$$

   Supposons maintenant que l'événement $[X_n = k]$ est réalisé. Alors au moment du $n+1$-ème tirage il y a k boules rouges sur $n+2$ boules au total, la probabilité de $[X_{n+1} = k]$, c'est à dire la probabilité de tirer une boule blanche, est $\dfrac{n+2-k}{n+2}$ donc :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)=\mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})=\frac{n+2-k}{n+2}$$

(d) Pour que $[X_{n+1}=k]$ soit réalisé, il faut que le nombre de boule rouge dans l'urne après le n-ème tirage soit k ou $k-1$ (on ne peut pas diminuer le nombre de boules rouges, on ne peut pas l'augmenter de plus de 1). On en déduit à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)&=\mathbb{P}(X_n=k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)+\mathbb{P}(X_n=k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\\&=\frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(X_n=k)\end{aligned}$$

(e) On a déjà montré que ce résultat est vrai pour $n=1$ et $n=2$ dans les questions 1 et 2.

Supposons que $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$ pour un certain entier n. Alors, X_{n+1} est à valeurs dans $[\![1,n+2]\!]$. On a d'après la question 3.b) :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_{n+1}=n+2)=\frac{1}{n+2}$$

et pour tout entier $k\in[\![2,n+1]\!]$ on a d'après la question 3.d) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)&=\frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(X_n=k)\\&=\frac{k-1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}+\frac{n+2-k}{n+2}\times\frac{1}{n+1}\qquad\text{par hypothèse de récurrence}\\&=\frac{1}{n+1}\times\frac{k-1+n+2-k}{n+2}\\&=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}\\&=\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

donc X_{n+1} suit bien la loi uniforme sur $[\![1,n+2]\!]$. Par récurrence on en conclut que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,n+1]\!])$.

3. (a) Par symétrie du problème, Y_n suit la même loi que X_n (il suffit de repeindre les boules blanches en boules rouges et inversement pour se ramener à la même situation).

(b) Pour tout entier $n\geq 1$, X_n+Y_n est le nombre total de boules dans l'urne à l'issue du n-ème tirage : $X_n+Y_n=n+2$.

(c) On a $Y_n=n+2-X_n$ donc d'après le cours $\rho(X_n,Y_n)=-1$.

Exercice 5

1. (a) $Y(\Omega)=[\![2;+\infty[\![$.

(b) Pour tout entier $k\geq 2$, $(Y=k)$ est réalisé si les $k-1$ premiers objets sont placés dans la même boite et le k-ème est placé dans une boite différentes des premiers.

La probabilité que $k-1$ objets successifs soient placés dans la même boite est $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ (car une fois le premier objet placé chaque objet suivant a probabilité $\frac{1}{3}$ d'être placé dans la même boite que le 1er), et la probabilité que le k-ème soit placé dans une boite différente est alors $\frac{2}{3}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

(c) $Y-1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y-1=k) = \mathbb{P}(Y=k+1) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1-2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$.

(d) On en déduit $E(Y-1) = \frac{3}{2}$ donc $E(Y)-1 = \frac{3}{2}$ donc $E(Y) = \frac{5}{2}$. De même, $V(Y-1) = \dfrac{1/3}{4/9} = \dfrac{3}{4}$ donc $V(Y) = \dfrac{3}{4}$.

2. (a) Notons d'abord que si $\ell \in \{1,2\}$ ou si $k=1$ ou si $\ell \leq k$ alors $\mathbb{P}(Z=\ell \mid Y=k) = 0$.

   Si $(Y=k)$ est réalisé, alors après le k-ème objet placé il y a deux boites occupées et une boite vide. Pour tout $\ell > k$, on a alors $(Z=\ell)$ réalisé si et seulement si les objets $k+1$ à $\ell-1$ sont placé dans les mêmes deux boites que les k premiers, et le ℓ-ème est placé dans la boite vide. On a donc :

$$\mathbb{P}(Z=\ell \mid Y=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1-(k+1)+1} \times \frac{1}{3} = \frac{2^{\ell-k-1}}{3^{\ell-k}}$$

   (b) On en déduit que pour tout $k \geq 2$ et tout $\ell \geq k+1$ on a :

$$\mathbb{P}(Z=\ell, Y=k) = \mathbb{P}(Y=k) \times \mathbb{P}(Z=\ell \mid Y=k) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{k-2}} \times \frac{2^{\ell-k-1}}{3^{\ell-k}} = \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}}$$

3. Soit $\ell \geq 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=\ell) &= \sum_{k=2}^{\ell-1} \mathbb{P}(Z=\ell, Y=k) \\
&= \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} \\
&= \frac{1}{3^{\ell-1}} \sum_{k=2}^{\ell-1} 2^{\ell-k} \\
&= \frac{1}{3^{\ell-1}} \sum_{k'=1}^{\ell-2} 2^{k'} && \text{par interversion du sens de sommation} \\
&= \frac{1}{3^{\ell-1}} \frac{2^{\ell-2+1}-2^1}{2-1} \\
&= \frac{2^{\ell-1}-2}{3^{\ell-1}}
\end{aligned}$$

4. Pour tout $\ell \geq 3$, $\ell\mathbb{P}(Z=\ell) = \ell\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\ell-1} - 2\ell\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\ell-1}$. On reconnait deux termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$). Ainsi, Z admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{\ell=3}^{+\infty} \ell\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1} - 2\sum_{\ell=3}^{+\infty} \ell\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - 2\times\frac{2}{3} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 2\times\frac{1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{11}{2}
\end{aligned}$$

   De même, $\ell(\ell-1)\mathbb{P}(Z=\ell) = \dfrac{2}{3}\ell(\ell-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\ell-2} - \dfrac{2}{3}\ell(\ell-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\ell-2}$. On reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées seconde convergentes, donc $Z(Z-1)$ admet une espérance d'après le théorème de transfert et :

$$\begin{aligned}
E(Z(Z-1)) &= \frac{2}{3}\sum_{\ell=3}^{+\infty}\ell(\ell-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-2} - \frac{2}{3}\sum_{\ell=3}^{+\infty}\ell(\ell-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-2} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}-2\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}-2\right) \\
&= \frac{104}{3}-\frac{19}{6} \\
&= \frac{189}{6}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$E(Z^2) = E(Z(Z-1)+Z) = E(Z(Z-1)) + E(Z) = \frac{189}{6} + \frac{11}{2} = \frac{222}{6} = 37$$

et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 37 - \frac{121}{4} = \frac{27}{4}$$

5. (a) On a déjà calculé $E(Y)$ et $E(Z)$, il faudrait calculer $E(YZ)$:

$$E(YZ) = \sum_{\ell=3}^{+\infty}\sum_{k=2}^{\ell} k\ell\mathbb{P}(Y=k, Z=\ell)$$

l'expression exacte est longue et difficile à exprimer (il faut les expressions de $\sum_{k=2}^{\ell-1} kx^{k-1}$ en fonction de ℓ qui s'obtiennent en dérivant l'égalité $\sum_{k=2}^{\ell-1} x^k = \dfrac{x^2-x^\ell}{1-x}$).

On peut trouver $\mathrm{Cov}(Y,Z)$ plus simplement en remarquant que $Z = Y + T$ où T suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ indépendante de Y. En effet, Z est le temps d'attente pour remplir deux boites plus le temps d'attente pour mettre un objet dans l'unique boite vide.

Ainsi :

$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathrm{Cov}(Y, Y+T) = \mathrm{Cov}(Y,Y) + \underbrace{\mathrm{Cov}(Y,T)}_{=0 \text{ par indépendance}} = V(Y) = \frac{3}{4}$$

(b) $\mathrm{Cov}(Y,Z) \neq 0$ donc Y et Z ne sont pas indépendantes.

(c) $\rho(Y,Z) = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{V(Y)V(Z)}} = \dfrac{V(Y)}{\sqrt{V(Y)V(Z)}} = \dfrac{3/4}{\sqrt{3/4\times 27/4}} = \dfrac{1}{3}$